Cinématique du point

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

1 REPERE D'ESPACE ET REPERE DE TEMPS

1.1 L'espace physique

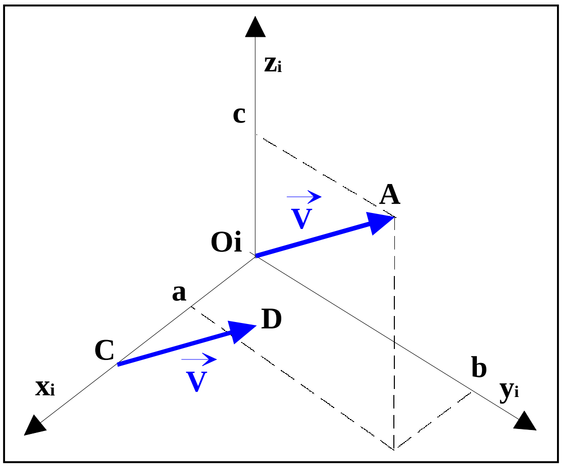
L'espace physique est modélisé par un repère affine à trois dimensions, noté $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ où O_i est un point quelconque mais souvent appelé origine du repère affine. A ce repère affine, on associe un repère vectoriel $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ de base orthonormée directe $B_i=(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$, c'est à dire :

($\|\vec{x}_i\|=1,\|\vec{y}_i\|=1,\|\vec{z}_i\|=1$ et $\vec{x}_i.\vec{y}_i=0,\vec{x}_i.\vec{z}_i=0,\vec{y}_i.\vec{z}_i=0$ et pour finir $\vec{x}_i\wedge\vec{y}_i=\vec{z}_i$).

1.1.1 Représentation géométrique d'un espace affine

Le repère affine $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ est représenté géométriquement en noir sur la figure ci-contre.

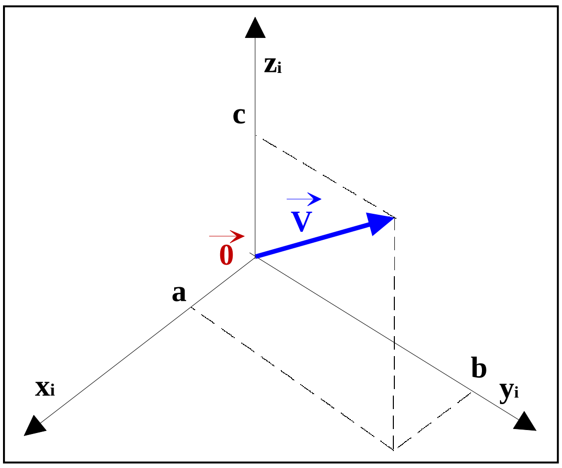
Le vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{O_iA}=a.\vec{x}_i+b.\vec{y}_i+c.\vec{z}_i$ ou (a,b,c) sont les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{O_iA}$ dans la base $B_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$.



Remarque : en prenant un vecteur $\overrightarrow{CD}$ tel que $\|\overrightarrow{CD}\|=\|\overrightarrow{O_iA}\|$ et $\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{O_iA}=\vec{0}$ ($\overrightarrow{CD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{O_iA}$) dans l'espace affine ce sont deux vecteurs différents (voir figure). Par contre dans l'espace vectoriel $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$, les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{CD}=a.\vec{x}_i+b.\vec{y}_i+c.\vec{z}_i$, ils sont identiques.

1.1.2 Propriétés des espaces vectoriels

Un espace vectoriel peut être composé de sous espace vectoriels. Ainsi, l'espace vectoriel $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ est composé du plan vectoriel $P_{1i}(\vec{x}_i,\vec{y}_i)$ ou $P_{2i}(\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ et de la droite vectorielle tel que $D_{1i}(\vec{x}_i)$ ou $D_{2i}(\vec{z}_i)$.



Le cours de mathématiques sur les espaces affines et vectoriels montre que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ ne peut jamais être vide et contient au minimum l'élément neutre pour l'addition vectorielle, c'est à dire le vecteur nul noté : $\vec{0}$.

1.1.3 Représentation géométrique d’un espace affine

Dans l’espace vectoriel $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$, il n’y a plus de point, il n’y a que des vecteurs.

A titre de représentation graphique, le vecteur nul $\vec{0}$ peut être dessiné par un point.

Ce point n’a pas de position spatiale précise et tous les vecteurs appartenant à l’espace vectoriel $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ doivent passer obligatoirement par la représentation ponctuelle du vecteur nul.

$\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i$ et $\vec{V}$ passent donc par le seul point de la représentation géométrique et graphique de l’espace vectoriel $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$.

1.2 Le temps

Le temps est modélisé par un espace affine $\mathcal{T}(\tau_0,\vec{t})$ de dimension 1. Cet espace vectoriel $T(\vec{t})$ est associé à $\mathcal{T}(\tau_0,\vec{t})$.

1.2.1 Représentation géométrique de l’espace affine « Temps »

τ_0 est un point appelé instant initial. La position de l’instant τ_0 n’a aucune importance, sauf pour dater des événements par rapport à une origine du temps fixe.

Le vecteur $\overrightarrow{\tau_1\tau_2}$ est appelé le vecteur durée, plus communément durée. La norme du vecteur durée, $\left\|\overrightarrow{\tau_1\tau_2}\right\|$ est exprimé en seconde (s).

Définition *: La seconde est équivalent à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyper fins de l’état fondamental de l’atome de césium 133.*

1.3 Déplacement d'un solide dans l’espace physique

1.3.1 Le repère ESPACE – TEMPS

Pour modéliser le déplacement d’objets ou de personnes dans l’espace physique, il est utilisé un espace affine de dimension trois $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ associé à l’espace affine temps $\mathcal{T}(\tau_0,\vec{t})$. Ces deux espaces affines sont distincts, mais pour modéliser le déplacement d’un point M dans l’espace physique, on donne le vecteur $\overrightarrow{O_iM} = x(t)\vec{x}_i + y(t)\vec{y}_i + z(t)\vec{z}_i)$ où x(t), y(t) et z(t) sont des coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{O_iM}$ projetées dans le repère vectoriel $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$.

L’ensemble des deux espaces affine $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ et $\mathcal{T}(\tau_0,\vec{t})$ forme le repère ESPACE-TEMPS.

1.3.2 Remarque liée à la mécanique

La modélisation des déplacements d'objets ou de personnes dans l'espace physique est appelée "Etude des mouvements".

La théorie nommée "Mécanique" englobe cette modélisation. En Classe préparatoire aux grandes écoles d'ingénieurs (C.P.G.E. P.S.I et M.P), la mécanique est limitée à la mécanique newtonienne des solides.

Les outils de calculs en Mécanique du solide sont vectoriels. C'est pourquoi, nous travaillerons essentiellement dans des repères vectoriels $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ souvent assimiler à leur base $b_i = (\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$.

2 LA CINEMATIQUE DU POINT

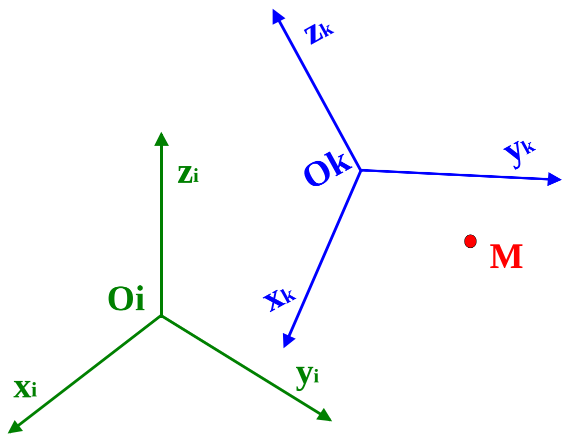
La cinématique du point se limite à la recherche du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération d'un point M par rapport à deux repères R_i et R_k.

2.1 Le changement de repère

Soit un point M en mouvement par rapport au repère affine $\Re_k(O_k,\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k)$ en mouvement par rapport au repère affine $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$.

$b_i = (\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ et $b_k = (\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k)$ sont des bases orthonormées directes.

$R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ et $R_k(\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k)$ sont des repères vectoriels associés respectivement à $\Re_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ et $\Re_k(O_k,\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k)$.



2.2 Vecteur vitesse d'un point M par rapport à un repère R

Par définition du vecteur vitesse, nous avons : $\overrightarrow{V}_{(M/R_i)} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{R_i}$ et $\vec{V}(M/R_k) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{R_k}$.

Le vecteur position $\overrightarrow{O_iM}$ se calcule grâce à la relation de CHASLES. On a alors $\overrightarrow{O_iM} = \overrightarrow{O_iO_k} + \overrightarrow{O_kM}$.

donc : $\left(\frac{d\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{R_i} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_iO_k}}{dt}\right)_{R_i} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{R_i}$.

La dérivation vectorielle permet d'écrire :

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

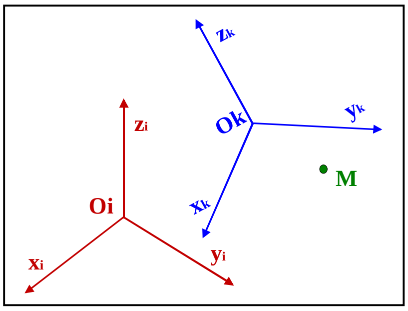
$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{R_i} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_iO_k}}{dt}\right)_{R_i} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{R_k} + \vec{\Omega}_{k/i} \wedge \overrightarrow{O_kM} \ .$$

Soit

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(M/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}} + \overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{O_kM} + \overrightarrow{V_{(M/R_k)}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{V_{(M/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(M/R_k)}} + \overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_i)}} \text{ avec} \\ \overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}} + \overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{O_kM} \end{array}}$$

On emploie communément le langage suivant :



- $\overrightarrow{V_{(M/R_i)}}$ est le vecteur vitesse absolue du point M pour un observateur lié au repère R_i,
- $\overrightarrow{V_{(M/R_k)}}$ est le vecteur vitesse relative du point M pour un observateur lié au repère R_k,
- $\overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \overrightarrow{O_kM}$ est le vecteur vitesse d'entraînement du point M dans le mouvement du repère R_k par rapport au repère R_i, c'est le vecteur vitesse du point M appartenant au repère R_k pour un observateur lié au repère R_i.

2.2.1 Propriétés du vecteur vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_i)}}$

2.2.1.1 Première propriété : $\overrightarrow{V_{(M\in R_i/R_k)}} = -\overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_i)}}$

L'antisymétrie par rapport aux indices se démontre aisément. En effet :

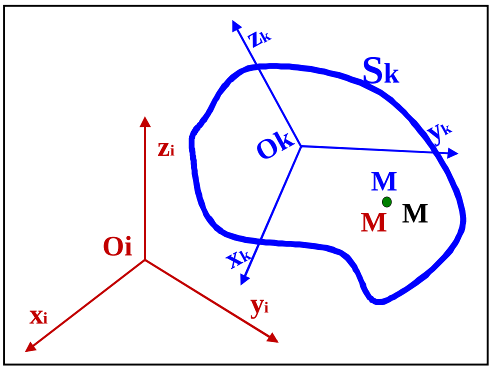
$$\overrightarrow{V_{(M/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_i)}} + \overrightarrow{V_{(M/R_k)}} \ ,$$

$$\overrightarrow{V_{(M/R_k)}} = \overrightarrow{V_{(M\in R_i/R_k)}} + \overrightarrow{V_{(M/R_i)}} \ .$$

En additionnant ces deux équations, on obtient bien :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(M\in R_i/R_k)}} = -\overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_i)}}}$$

2.2.1.2 Seconde propriété : Existence d'un torseur cinématique pour modéliser le mouvement d'entraînement



La relation $\overrightarrow{V_{(M \in R_k/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \overrightarrow{O_k M}$ peut s'écrire avec plus de précision.

Ecrivons le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}}$ en précisant que le point O_k est fixe dans R_k.

$\overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}}$ se met alors sous la forme : $\overrightarrow{V_{(O_k \in R_k/R_i)}}$.

Finalement,

$$\overrightarrow{V_{(M \in R_k/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \overrightarrow{O_k M} = \overrightarrow{V_{(O_k \in R_k/R_i)}} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \overrightarrow{O_k M}$$

$$\overrightarrow{V_{(M \in R_k/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k \in R_k/R_i)}} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \overrightarrow{O_k M}$$

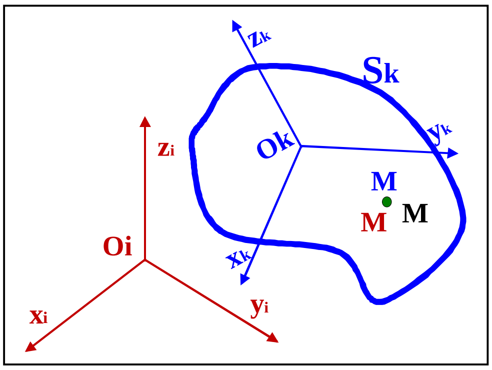
Cette dernière relation vectorielle montre l'existence d'un champ antisymétrique (voir cours outils de la mécanique). De plus, en Cinématique du solide, le solide S_k est lié au repère R_k, le point M appartenant au solide S_k n'a aucun mouvement par rapport au repère R_k, donc : $\overrightarrow{V_{(M \in S_k/R_k)}} = \overrightarrow{V_{(M \in R_k/R_k)}} = \vec{0}$.

La relation de changement de point donne naissance au torseur suivant :

$$\mathcal{V}_{R_k/R_i} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \\ \overrightarrow{V_{(O_k \in R_k/R_i)}} \end{array} \right\}_{O_k} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \\ \overrightarrow{V_{(M \in R_k/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k \in R_k/R_i)}} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \overrightarrow{O_k M} \end{array} \right\}_{M}$$

- $\overrightarrow{V_{(M \in R_k/R_i)}}$ se lit : "vitesse du point M appartenant au solide S_k par rapport au repère R_i".
- $\vec{\Omega}_{Rk/Ri}$ est appelé taux de rotation instantanée du repère R_k (ou du solide S_k) par rapport au repère R_i (ou au solide S_i).

2.2.1.2.1 Point coïncidant $M_i(t)$



Un point M, appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i, coïncide à chaque instant avec un point du repère R_i. Ce point est dit coïncidant du point M à l'instant t.

M est appelé point mobile et $M_i(t)$ est appelé point coïncidant à l'instant t.

Dans le modèle de l'espace physique, au point M lié au repère R_i, on trouve donc les deux points différents suivants :

- Le point **M**, modélisé par un point matériel,
- Le point M lié au solide S_k donc au repère R_k.

2.3 Champ des vecteurs-accélération

2.3.1 Changement de repère

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_i)}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{(M/R_i)}}}{dt}\right)_{R_i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Gamma_{(M/R_k)}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{(M/R_k)}}}{dt}\right)_{R_k}$$

En dérivant vectoriellement $\overrightarrow{V_{(M/R_i)}} = \overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \overrightarrow{O_kM} + \overrightarrow{V_{(M/R_k)}}$ par rapport au temps dans le repère Ri,

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_i)}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{(M/R_i)}}}{dt}\right)_{R_i} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{(O_k/R_i)}}}{dt}\right)_{R_i} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{R_i} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{(M/R_k)}}}{dt}\right)_{R_i}$$

En utilisant la dérivation vectorielle :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_i)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(O_k/R_i)}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}}}{dt}\right)_{R_i} \wedge \overrightarrow{O_kM} + \overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{R_i} + \overrightarrow{\Gamma_{(M/R_k)}} + \left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{V_{(M/R_k)}}\right)$$

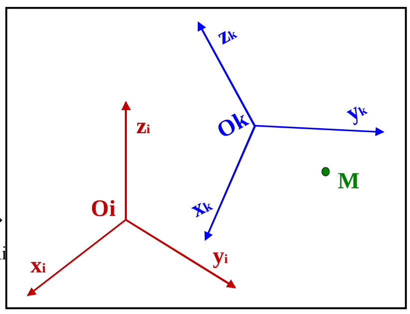
$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_i)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(O_k/R_i)}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}}}{dt}\right)_{R_i} \wedge \overrightarrow{O_kM} + \overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{O_kM}\right) +$$
$$\left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{V_{(M/R_k)}}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{(M/R_k)}} + \left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{V_{(M/R_k)}}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_i)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(O_k/R_i)}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}}}{dt}\right)_{R_i} \wedge \overrightarrow{O_kM} + \overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{O_kM}\right) + \overrightarrow{\Gamma_{(M/R_k)}} + 2\left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{V_{(M/R_k)}}\right)}$$

On emploie communément le langage suivant :

- $\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_i)}}$ vecteur accélération absolue du point M pour un observateur lié au repère R_i,
- $\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_k)}}$ vecteur accélération relative du point M pour un observateur lié au repère R_k,



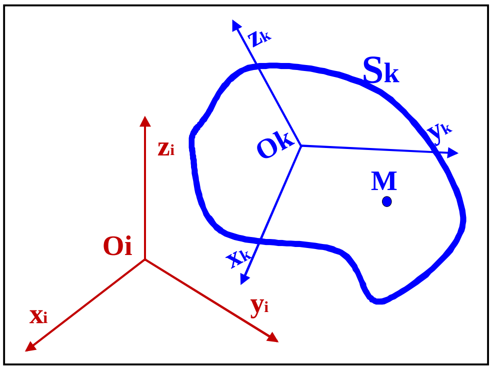
- $\overrightarrow{\Gamma_{(M\in R_k/R_i)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(O_k/R_i)}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}}}{dt}\right)_{R_i} \wedge \overrightarrow{O_kM} + \overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}}\right.$

  vecteur accélération d'entraînement du point M dans le mouvement du repère R_k par rapport au repère R_i, c'est donc l'accélération du point M appartenant au repère R_k pour un observateur lié au repère R_i,

- $2.\left(\overrightarrow{\Omega_{Rk/Ri}} \wedge \overrightarrow{V_{(M/R_k)}}\right)$ est le vecteur accélération de CORIOLIS.

2.3.2 Vecteur accélération d'entraînement $\overrightarrow{\Gamma_{(M\in R_k/R_i)}}$

- En Cinématique du solide, le solide S_k est lié au repère R_k, le point M appartenant au solide S_k n'a aucun mouvement par rapport au repère R_k, donc : $\overrightarrow{V_{(M\in S_k/R_k)}} = \overrightarrow{V_{(M\in R_k/R_k)}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{(M\in R_k/R_k)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(M\in S_k/R_k)}} = \vec{0}$.



Le champ des vecteurs-accélération s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M\in S_k/R_i)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(O_k/R_i)}} + \overrightarrow{\left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}}{dt}\right)_{R_i}} \wedge \overrightarrow{O_k M} + \overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}} \wedge \overrightarrow{O_k M}\right)$$

Ce champ de vecteurs n'est pas anti-symétrique, il n'existe donc pas de torseur d'accélération pour modéliser le mouvement d'entraînement.

